Неопределённый интеграл. Основные понятия

Определение: Функция F называется *первообразной функции f на множестве $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}$*, если она дифференцируема и для $\forall x \in \mathbf{X}$ выполнено: $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Замечание: Первообразная F определена с точностью до *const*.

Теорема: Если f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует первообразная $F:\ F'(x) = f(x),\ x \in [a;b]$.

Определение: Совокупность **всех** первообразных для функции f, определённой на множестве $\mathbf{X}$, называется *неопределённым интегралом* от этой функции на $\mathbf{X}$. Обозначение:

$$\int f(x)\,dx.$$

Замечание: Символ $\int$ есть стилизованная буква $S-$ начальная буква латинского слова "Summa". Термин "интеграл"(от латинского слова integer - целый) был предложен *Иоганном Бернулли. Вильгельм Лейбниц*, который ввёл данный символ, первоначально говорил "сумма".

Если F любая первообразная для функции f, то $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где $C-$произвольная постоянная.

Методы интегрирования:

1. *Замена переменного.*

Пусть f непрерывная, $\varphi(t)-$ непрерывно дифференцируемая функции. Тогда:

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \varphi(t) \\ dx & = & \varphi'(t)\,dt \end{array} \right\} = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt.$$

2. *Расщепление.*

Пусть $f = f_1 \pm f_2$, тогда $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx.$

Утверждение: *(Интегрирование по частям)*

Пусть функции u и v непрерывны на некотором отрезке $\mathbf{X}$, и дифференцируемы во всех его внутренних точках. Тогда если на $\mathbf{X}$ существует интеграл $\int v\,u'\,dx$, то существует и интеграл $\int u\,v'\,dx$, причём

$$\int u'\,v\,dx = u\,v - \int u\,v'\,dx \ \text{ или } \int v\,du = u\,v - \int u\,dv.$$

21.1. Приведите пример функции

(а) • с разрывом $I^{\text{го}}$ рода, не имеющую первообразную;

(б) с разрывом $II^{\text{го}}$ рода, не имеющую первообразную;

(в) $\varphi(t)$, имеющей бесконечную производную, при которой замена переменной в интеграле справедлива;

(г) $\varphi(t)$, имеющей бесконечную производную, при которой замена переменной в интеграле некорректна.

21.2. Найдите следующие интегралы:

(а) • $\displaystyle\int |x|\,dx;$ *(б)* $\displaystyle\int (|1+x|-|1-x|)\,dx;$

(в) $\displaystyle\int e^{|x|}\,dx.$

21.3. *(1638, 1643, 1646, 1648, 1650, 1652, 1663, 1670, 1682, 1683, 1688, 1693)*

Найдите следующие интегралы:

(а) • $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\,dx;$ *(б)* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx;$

(в) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx;$ *(г)* $\displaystyle\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx, \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi);$

(д) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx;$ *(е)* $\displaystyle\int \operatorname{th}^2 x\,dx;$

(ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}};$ *(з)* $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x};$

(и) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}};$ *(к)* • $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$

(л) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}};$ *(м)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}};$

21.4. *(1703, 1706, 1711, 1720, 1725, 1726, 1733, 1737, 1745, 1767, 1781, 1794)*
Вычислите следующие интегралы:

(а) • $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$;

(б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{ch} x}$;

(в) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\, dx$;

(г) • $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$;

(д) • $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\, dx$;

(е) $\displaystyle\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}\, dx$;

(ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$;

(з) • $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x+2)(x+3)}$;

(и) $\displaystyle\int \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{3}\, dx$;

(к) • $\displaystyle\int x^3(1-5x^2)^{10}\, dx$;

(л) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$;

(м) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\, dx$.

21.5. Вычислив предложенные интегралы, докажите следующие формулы:

(а)
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} \;=\; \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} \;+\; C, \quad (a \neq 0);$$

(б)
$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} \;=\; \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| \;+\; C, \quad (a \neq 0);$$

(в)
$$\int \frac{x\, dx}{a^2 \pm x^2} \;=\; \pm\frac{1}{2}\ln|a^2 \pm x^2| \;+\; C, \quad a \in \mathbb{R};$$

(г)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \;=\; \arcsin\frac{x}{a} \;+\; C, \quad (a > 0);$$

(д) •
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \;=\; \ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}| \;+\; C, \quad (a > 0);$$

(е)
$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} \;=\; \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} \;+\; C, \quad (a > 0);$$

(ж) •
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx \;=\; \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} \;+\; C, \quad (a > 0);$$

(з)
$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx \;=\; \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \;+\; C, \quad (a > 0);$$

21.6. Применяя различные методы интегрирования, вычислите:

(а) • $\displaystyle\int \frac{dx}{a+bx^2}, \quad (a\cdot b\neq 0);$

(б) $\displaystyle\int \frac{\big(\arccos(\ln x)\big)^2}{x}\,dx;$

(в) $\displaystyle\int \sin 2x \ln(1+\cos x)\,dx;$

(г) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx;$

(д) $\displaystyle\int \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx;$

(е) $\displaystyle\int \frac{e^{a\cdot \operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx;$

21.7. Предположим, что функции $f:(a;b)\mapsto\mathbb{R}$, $g:(a;b)\mapsto\mathbb{R}$ имеют производные второго порядка f'', g'' на $(a;b)$, причём

$$f''(x)=c\,f(x),\quad g''(x)=d\,g(x),\quad x\in(a;b),$$

с некоторыми числами c и d, $c\neq d$. Найдите первообразную функции $f\cdot g$ на $(a;b)$.

21.8. Установите неточность в следующей цепи рассуждений.

Интегрируя по частям интеграл $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$, будем иметь:

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\frac{\sin x}{\sin x}+\int \sin x\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=1+\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=2+\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\ldots=n+\int \frac{\cos x}{\sin x}dx,$$

откуда $0=1=2=\ldots=n$ **!**

21.9. Функция $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ имеет первообразную F на $\mathbb{R}$ и $\forall x\in\mathbb{R}$ выполнено $F(x)=f(x)$. Найдите функцию f.

21.10. ⋆ Пусть F – непрерывна на интервале $(a;b)$, $c\in(a;b)$, и функция $f:(a;b)\mapsto\mathbb{R}$ непрерывна в точке c. Предположим, что функция F есть первообразная функции f на каждом из интервалов $(a;c)$ и $(c;b)$. Докажите, что F есть первообразная функции f на интервале $(a;b)$.

Интегрирование рациональных функций

Рассмотрим задачу интегрирования рациональных дробей

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

где P, Q – многочлены, причём степень P меньше степени Q (случай *правильной дроби*).

Замечание: неправильная дробь всегда может быть приведена к правильной делением.

Теорема: Пусть $\dfrac{P}{Q}$ – правильная дробь,

$$Q(x) = (x-b_1)^{\beta_1}\dots(x-b_m)^{\beta_m}\,(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}\dots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n},$$

где $\beta_j, \lambda_i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-x_1)} + \dots + \frac{A_{\beta_1}^{(1)}}{(x-x_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{A_1^{(m)}}{(x-x_m)} + \dots + \frac{A_{\beta_m}^{(m)}}{(x-x_m)^{\beta_m}} +$$
$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \dots + \frac{M_{\lambda_1}^{(1)}x+N_{\lambda_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}} + \dots + \frac{M_1^{(n)}x+N_1^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)} + \dots + \frac{M_{\lambda_n}^{(n)}x+N_{\lambda_n}^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}},$$

где $A_l^{(i)}, M_m^{(j)}, N_n^{(k)}$– вещественные постоянные, которые находятся методом *неопределённых коэффициентов*.

В случае, когда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)^n\,r(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n} + \frac{R(x)}{r(x)}, \tag{1}$$

коэффициенты A_k можно находить следующим образом:

$$(1)\cdot(x-x_1)^n \;\Leftrightarrow\; \frac{P(x)}{r(x)} = A_1(x-x_1)^{n-1} + \dots + A_{n-1}(x-x_1) + A_n + \frac{R(x)}{r(x)}\cdot(x-x_1)^n \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; A_n = \left.\frac{P(x)}{r(x)}\right|_{x=x_1};\; A_{n-1} = \left.\left(\frac{P(x)}{r(x)}\right)'\right|_{x=x_1};\dots;A_{n-k} = \frac{1}{k!}\left.\left(\frac{P(x)}{r(x)}\right)^{(k)}\right|_{x=x_1},\quad k=\overline{0,n-1}.$$

Утверждение *(Метод Остроградского)*: Интеграл от рациональной дроби представим в виде:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \;=\; \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx,\quad \text{где} \tag{2}$$

$$Q_1(x) = (x-b_1)^{\beta_1-1}\dots(x-b_m)^{\beta_m-1}\,(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1-1}\dots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n-1},$$
$$Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)} = (x-b_1)\dots(x-b_m)\,(x^2+p_1x+q_1)\dots(x^2+p_nx+q_n);$$

а многочлены P_1, P_2 находятся методом *неопределённых коэффициентов*.

Замечание: чем выше кратность корней знаменателя Q, тем эффективнее оказывается метод Остроградского в сравнении с методом неопределённых коэффициентов.

Замечание: дробь $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ в равенстве **(2)** является *рациональной частью*, а $\displaystyle\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$ (т.к. это суперпозиция arctg и ln) - *иррациональной частью* интеграла от рациональной функции.

22.1. Докажите формулы интегрирования *простейших рациональных дробей*:

(а) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx \;=\; A\ln|x-a| \;+\; C;$

(б) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^\beta}\,dx \;=\; -\frac{A}{\beta-1}\,\frac{1}{(x-a)^{\beta-1}} \;+\; C, \quad (\beta\geqslant 2,\ \beta\in\mathbb{N});$

Пусть далее $x^2+px+q-$ *неприводимый многочлен*, т.е. $\dfrac{p^2}{4}-q<0$.

(в) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx \;=\; \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \;+\; C;$

(г) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}\,dx \;=\; -\frac{M}{2}\,\frac{1}{\lambda-1}\,\frac{1}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)K_\lambda \;+\; C,$ где

$K_1=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x+\frac{p}{2}}{a} \;+\; C,\;\; K_\lambda \;=\; \dfrac{x+\frac{p}{2}}{2a^2(\lambda-1)\big((x+\frac{p}{2})^2+a^2\big)^{\lambda-1}} \;+\; \dfrac{2\lambda-3}{a^2(2\lambda-2)}K_{\lambda-1},\;\; (\lambda\geqslant 2,\ \lambda\in\mathbb{N}).$

Замечание: Отметим, что каждая из четырёх простейших дробей выражается через *элементарные функции.*

22.2. *(1867, 1870, 1877, 1881, 1882, 1886)*

Применяя *метод неопределённых коэффициентов* и интегрируя получившиеся простейшие рациональные дроби, найдите следующие интегралы:

(а) • $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)};$

(б) $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{x^4+5x^2+4};$

(в) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)};$

(г) • $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1};$

(д) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-1};$

(е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+1}.$

22.3. Найдите *рациональную часть* интеграла:

(а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$; *(б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}$.

22.4. Найдите условие, при котором первообразная данной рациональной функции, является функцией рациональной:

(а) • $\displaystyle\frac{ax^2+bx+c}{x^5-2x^4+x^3}$; *(б)* $\displaystyle\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$, $P_n(x)$– многочлен степени n.

22.5. Применяя метод Остроградского, вычислите интегралы:

(а) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$; *(б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$;

(в) • $\displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$.

22.6. Применяя различные методы, найдите интегралы:

(а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^5+2)}$; *(б)* • $\displaystyle\int \frac{x+x^7}{1+x^4}\,dx$;

(в) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx$; *(г)* $\displaystyle\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4-2}\,dx$;

(д) $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x^{10}-10)^2}\,dx$.

Замечание: Отметим, что для вычисления данных интегралов основные методы интегрирования рациональных функций *не оптимальны.*

22.7. Выведите рекуррентные формулы, и вычислите следующие интегралы:

(а) $\displaystyle\int \frac{x^{2n}}{x^2+a^2}\,dx,\quad x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$;

(б) $\displaystyle\int \frac{x^{2n}}{x^2-a^2}\,dx,\quad x\in(a;+\infty),\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$;

(в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{2n}(x^2+a^2)},\quad x\in(0;+\infty),\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

22.8. Укажите метод вычисления интеграла $\int R\big(e^x\big)\,dx$, где $R-$ рациональная функция.

22.9. $\star$ Докажите следующие *алгебраические леммы*:

(а) Пусть $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $\;x \in \mathbb{R}-$ многочлен с действительными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$, причём $a_0 \neq 0$. Существует единственный с точностью до перестановки набор комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$ такой, что

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; Q(x) = a_0(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n).$$

(б) Пусть P и Q – многочлены с действительными коэффициентами. И степень P меньше степени Q. Пусть также многочлен Q имеет вид $Q(x) = (x - a)^m Q_1(x)$, $\;x \in \mathbb{R}$ с некоторыми числами $a \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$, причём $Q_1(x) \neq 0$. Тогда правильная дробь $\dfrac{P}{Q}$ единственным образом представляется в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x - a)^m} + \frac{P_1(x)}{(x - a)^{m-1}Q_1(x)}, \quad x \in \{u \in \mathbb{R} \,\big|\, Q(u) \neq 0\}, \tag{$*$}$$

где $A \in \mathbb{R}$ и P_1 – многочлен с действительными коэффициентами такой, что вторая дробь в правой части $(*)$ правильная.

(в) Пусть степень многочлена P меньше степени многочлена Q, многочлен Q имеет следующий вид:

$$Q(x) \;=\; (x^2 + px + q)^m Q_1(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

с некоторыми числами $p, q \in \mathbb{R}$, $\;m \in \mathbb{N}$, $\;p^2 - 4q < 0$, причём многочлен Q_1 не делится на $x^2 + px + q$. Тогда правильная дробь $\dfrac{P}{Q}$ единственным образом представима в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1}Q_1(x)}, \tag{$**$}$$

где $x \in \{\mathbb{R} \,\big|\, Q(u) \neq 0\}$, $\quad \{A, B\} \in \mathbb{R}$ и P_1 – многочлен с действительными коэффициентами такой, что вторая дробь в правой части равенства $(**)$ правильная.

Определение: Назовем *дробно-линейной иррациональностью* функцию вида:

$$\mathbf{R}\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),$$

где $\mathbf{R}(u; v)$ – рациональная функция двух аргументов, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ – постоянные, $(ad - bc \neq 0)$.

Рационализация дробно-линейной иррациональности осуществляется с помощью подстановки

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}; \quad t^n = \frac{ax+b}{cx+d}; \quad x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}; \quad dx = \frac{(ad-bc)\cdot nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\, dt.$$

Следовательно,

$$\int \mathbf{R}\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int \mathbf{R}\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \frac{(ad-bc)\cdot nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\, dt.$$

Замечание: Данная *рационализирующая подстановка* является **универсальной**, однако она далеко не всегда будет оптимальной.

23.1. *(1926, 1927, 1931, 1932)*

С помощью *приведения подынтегральной функции к рациональной* найдите следующие интегралы:

(а) • $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

(б) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

(в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\, dx$;

(г) • $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$;

(д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}$.

23.2. *(1937, 1938)*

Найдите интегралы от простейших квадратичных иррациональностей:

(а) • $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx;$ *(б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}};$

(в) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}}.$

<u>**Замечание:**</u> Интегралы вида:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \tag{1}$$

где P_n – алгебраический многочлен степени n, находятся с помощью тождества:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \;=\; Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{$*$}$$

где Q_{n-1} – алгебраический многочлен степени $(n-1)$ с неопределёнными коэффициентами, λ – ещё один неопределённый коэффициент.

23.3. *(1943, 1947)*

Используя предложенный метод, найдите следующие интегралы:

(а) • $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx;$ *(б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}};$

(в) $\displaystyle\int \frac{5x+3}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx;$

<u>**Замечание:**</u> Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x-d)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{2}$$

вычисляются при помощи замены: $t=\dfrac{1}{x-d}$. В результате они приводятся к интегралу вида:

$$-\int \frac{t^{n-1}\,dt}{\sqrt{At^2+Bt+C}},\quad (A,B,C-\text{некоторые коэффициенты}),$$

вычисление которых разобрано выше.

23.4. *(1952, 1953)*

Найдите следующие интегралы, разлагая рациональную функцию на простейшие дроби:

(а) • $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}};$ *(б)* $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}};$

Замечание: Для вычисления интеграла

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{n+1/2}} \tag{3}$$

применяется *подстановка Абеля*: $t = \left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'$.

Если в интеграле

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}\,(x^2+px+q)^m}\,dx$$

отношение трёхчленов ax^2+bx+c и x^2+px+q непостоянно делают замену переменного так, чтобы во вновь полученных трёхчленах одновременно исчезли члены с первой степенью. Это достигается, например, с помощью *дробно-линейной подстановки:*

$$x = \frac{\alpha+\beta t}{1+t}, \ \text{ если } \ p \neq \frac{b}{a}, \ \text{ и } \ x = t - \frac{p}{2}, \ \text{ если } \ p = \frac{b}{a}.$$

23.5. *(1965)* С помощью *дробно-линейной* подстановки: $x = \dfrac{\alpha+\beta t}{1+t}$ вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}};$$

Замечание: Интегралы вида:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \quad a \neq 0, \ \ b^2-4ac \neq 0 \tag{4}$$

могут быть сведены к интегралам от рациональных функций *подстановками Эйлера*:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} \ = \ \pm\sqrt{a}x \pm t$, если $a > 0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} \ = \ \pm xt \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$;

3) $\sqrt{ax^2+bx+c} \ = \ \pm(x-x_1)t, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} \ = \ \pm(x-x_2)t,$

где x_1, x_2 - различные корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c.

Отметим, что знаки в правых частях равенств можно брать в любых комбинациях.

23.6. *(1966, 1967)* Найдите следующие интегралы, применяя подстановки Эйлера:

(а) • $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx;$ *(б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x+x^2}};$

(в) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}.$

Определение: Интегралы вида:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \tag{5}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$; $m, n, p \in \mathbb{Q}$, причём $a \neq 0$, $b \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$, называют *интегралами от дифференциального бинома.* Данные интегралы могут быть приведены к интегрированию рациональных функций лишь в следующих трёх случаях (*теорема Чебышева*):

1. Пусть p - целое. Тогда полагается $x = z^N$, где N - общий знаменатель дробей m и n.
2. Пусть $\dfrac{m+1}{n}$ - целое. Тогда полагается $a + bx^n = z^N$, где N - знаменатель дроби p.
3. Пусть $\dfrac{m+1}{n} + p$ - целое. Тогда применяется подстановка $ax^{-n} + b = z^N$, где N - знаменатель дроби p.

23.7. Найдите следующие интегралы:

(а) $\displaystyle\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$; *(б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$;

(в) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^{2/3}}}$.

Интегралы вида:

$$\int \mathbf{R}(\sin x;\, \cos x)\, dx, \tag{1}$$

где $\mathbf{R}(u;v)$– рациональная дробь, приводится к интегрированию рациональных функций с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$, при этом:

$$\sin x \;=\; \frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}} \;=\; \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x \;=\; \frac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}} \;=\; \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg} t, \qquad dx \;=\; \frac{2}{1+t^2}\, dt;$$

$$\Longrightarrow \int \mathbf{R}(\sin x;\, \cos x)\, dx \;=\; \int \mathbf{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Таким образом, интегралы типа (1) всегда берутся в конечном виде. Для их выражения, кроме функций, встречающихся при интегрировании рациональных дифференциалов, нужны лишь ещё тригонометрические функции.

__Замечание:__ Обратим внимание на то, что применение подстановки $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ возможно только на промежутках, не содержащих точек вида: $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Универсальная подстановка часто приводит к достаточно трудоемким рациональным интегралам. В некоторых случаях подынтегральная функция приводится к рациональной дроби более простым способом:

1) Если выполняется $\mathbf{R}(-\sin x;\, \cos x) = -\mathbf{R}(\sin x;\, \cos x)$, то удобно применить подстановку $t = \cos x,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$;

2) Если выполнено соотношение $\mathbf{R}(\sin x;\, -\cos x) \;=\; -\mathbf{R}(\sin x;\, \cos x)$, то применяется подстановка $t = \sin x,\ x \in (0; \pi)$;

3) Если выполняется $\mathbf{R}(-\sin x;\, -\cos x) \;=\; \mathbf{R}(\sin x;\, \cos x)$, то удобно применить подстановку $t = \mathrm{tg} x,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

__Замечание:__ Все тригонометрические интегралы вычисляются на промежутках области определения, где подынтегральные функции определены и непрерывны.

24.1. • Докажите, что любое рациональное выражение $\mathbf{R}(\sin x;\, \cos x)$ можно представить в виде суммы трех выражений, рассмотренных выше частных типов.

24.2. Докажите рекуррентные формулы понижения:

(а) $$\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x} \;=\; \frac{1}{2n} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \frac{dx}{\cos^{2n-1} x};$$

(б) $$\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x} \;=\; -\frac{1}{2n} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \frac{dx}{\sin^{2n-1} x}.$$

24.3. Вычислите следующие интегралы:

(а) • $$\int \frac{dx}{\sin^3 x}, \qquad (x \neq \pi n, \;\; n \in \mathbb{Z});$$

(б) $$\int \frac{dx}{\cos^5 x}, \qquad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \;\; n \in \mathbb{Z});$$

(в) $$\int \frac{dx}{\sin^5 x}, \qquad (x \neq \pi n, \;\; n \in \mathbb{Z}).$$

Замечание: Отметим, что данные вычисления полезно провести, не используя формул из предыдущего номера.

24.4. *(2013, 2017, 2019, 2020)*
Найдите интегралы, используя элементарные тригонометрические формулы:

(а) • $$\int \sin 5x \cdot \cos x \, dx;$$

(б) $$\int \cos^2 ax \cdot \cos^2 bx \, dx, \qquad (a \neq 0, \;\; b \neq 0, \;\; a - b \neq 0, \;\; a + b \neq 0);$$

(в) $$\int \frac{dx}{\sin{(x+a)}\, \sin{(x+b)}}, \qquad (a - b \neq \pi n, \;\; n \in \mathbb{Z});$$

(г) $$\int \frac{dx}{\sin{(x+a)}\, \cos{(x+b)}}, \qquad (a - b \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \;\; n \in \mathbb{Z});$$

24.5. Докажите формулы понижения для следующих интегралов:

(а) $$I_n \;=\; \int \sin^n x \, dx = \frac{1}{n}\Big[(n-1) I_{n-2} - \cos x \sin^{n-1} x\Big], \quad (n \in \mathbb{N},\, n > 2);$$

(б) $$K_n \;=\; \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n}\Big[(n-1) K_{n-2} + \sin x \cos^{n-1} x\Big] \quad (n \in \mathbb{N},\, n > 2).$$

24.6. *(2025, 2036)*

Найдите следующие интегралы, взятые на специальных промежутках:

(а) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}, \qquad x \in (-\pi;\, \pi);$

(б) • $\displaystyle\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x\cos x + 9\cos^3 x}\, dx, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right);$

(в) • $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}, \qquad x \in \mathbb{R};$

(г) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\, dx, \qquad x \in \mathbb{R}.$

<u>**Замечание:**</u> В последних двух примерах обратите внимание на то, что универсальная тригонометрическая замена возможна только на промежутках, не содержащих точек вида: $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

24.7. *(2029, 2034, 2038, 2040)*

Вычислите интегралы:

(а) • $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}\, dx;$

(б) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\, dx;$

(в) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^4 x}\, dx;$

(г) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}.$

24.8.

(а) Докажите, что:

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}\, dx \;=\; Ax + B\ln\left|a\sin x + b\cos x\right| + C, \quad \text{где } A,\ B,\ C - \text{постоянные;}$$

(б) Вычислите интеграл

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\, dx,$$

используя доказанную выше формулу.

24.9. Вычислите интегралы:

(а) $\displaystyle\int \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}\, dx, \qquad (0 < r < 1,\ \ -\pi < x < \pi);$

(б) • $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}}\, dx;$

(в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{tg} x}}.$

24.10. $\star$ Для интегралов

$$J_{n,m} = \int \sin^n x \cos^m x \, dx, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

докажите рекуррентные формулы:

$$J_{n,m} = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} J_{n-2,m}, \quad J_{n,m} = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} J_{n,m-2}.$$

С их помощью вычислите интеграл $\int \sin^6 x \cos^4 x \, dx$.

24.11. $\star$ Для интеграла

$$J_n = \int \frac{dx}{(a\cos x + c)^n}, \quad |a| \neq |c|, \ n \in \mathbb{N},$$

докажите рекуррентную формулу:

$$J_n = \frac{1}{(n-1)(a^2-c^2)} \left(\frac{a \sin x}{(a\cos x + c)^{n-1}} - (2n-3)\, c\, J_{n-1} + (n-2) J_{n-2} \right), \quad n > 1.$$

С её помощью найдите интегралы:

(а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$ (б) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^3}, \quad \varepsilon > 1.$

24.12. $\star$ Для интеграла

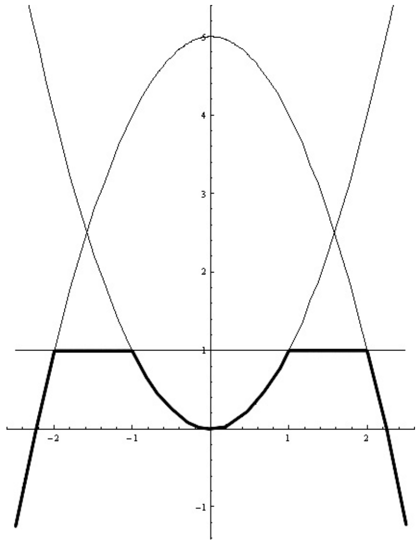
$$J_n = \int \left(\frac{\sin\big((x-a)/2\big)}{\sin\big((x+a)/2\big)} \right)^n dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

докажите рекуррентную формулу:

$$J_n = \frac{2\sin a}{n-1} \left(\frac{\sin\big((x-a)/2\big)}{\sin\big((x+a)/2\big)} \right)^{n-1} + 2\cos a \cdot J_{n-1} - J_{n-2}, \quad n > 1.$$

С её помощью вычислите интеграл J_3.

25.1. Найдите следующие интегралы:



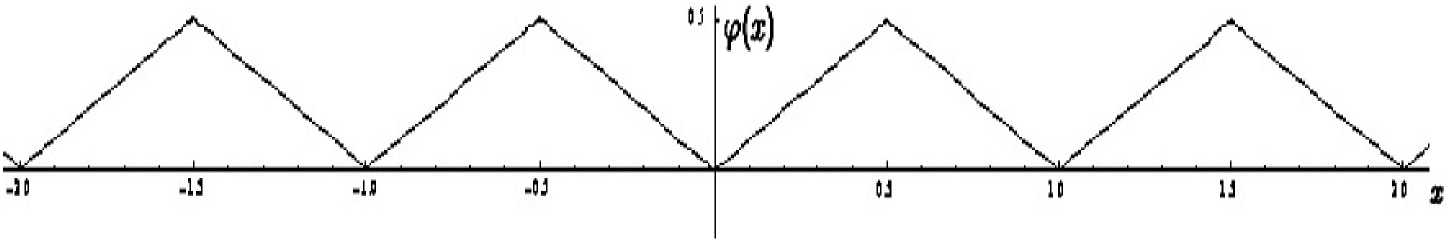
(а) • $\displaystyle\int \min\{5 - x^2;\ 1;\ x^2\}\,dx$;

(б) $\displaystyle\int \max\{|x|;\ 4\}\,dx$;

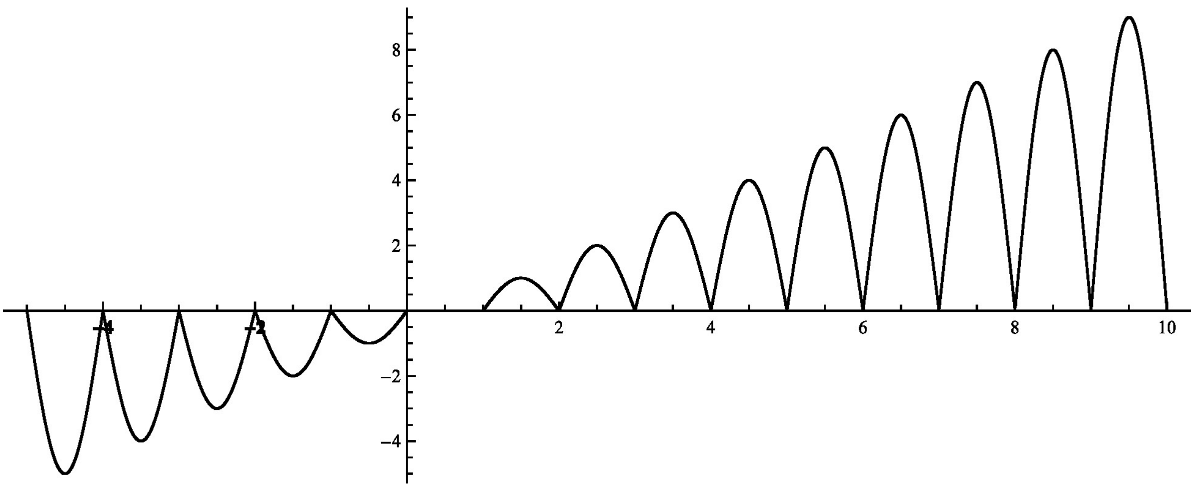
25.2. *(2172, 2173)*

Вычислите интегралы:

(а) • $\displaystyle\int \varphi(x)\,dx$, где $\varphi(x)$ – расстояние от числа x до ближайшего целого;



(б) $\displaystyle\int [x]\cdot|\sin\pi x|\,dx$, где $[x]$ – целая часть числа x, $x > 0$;



(в) ⋆ $\displaystyle\int (-1)^{[x]}\,dx$, где $[x]$ – целая часть числа x;

(г) $\displaystyle\int \left[e^x\right]dx$, где $[e^x]$ – целая часть числа e^x.

Обобщённая формула интегрирования по частям.

Пусть функции u, v по $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируемы, тогда справедливо:

$$\int u\,v^{(n+1)}\,dx \;=\; u\,v^{(n)} - u'\,v^{(n-1)} + u''\,v^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n\,u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx.$$

Замечание: Особенно выгодно пользоваться этой формулой, когда одним из множителей подынтегральной функции служит целый многочлен. Если функция u представляет собой многочлен степени n, то $u^{(n+1)}(x) = 0$, и для интеграла в левой части получается окончательное выражение.

25.3. Пусть $n \in \mathbb{Z}$, P_n – многочлен n-ой степени. Вычислите следующие интегралы:

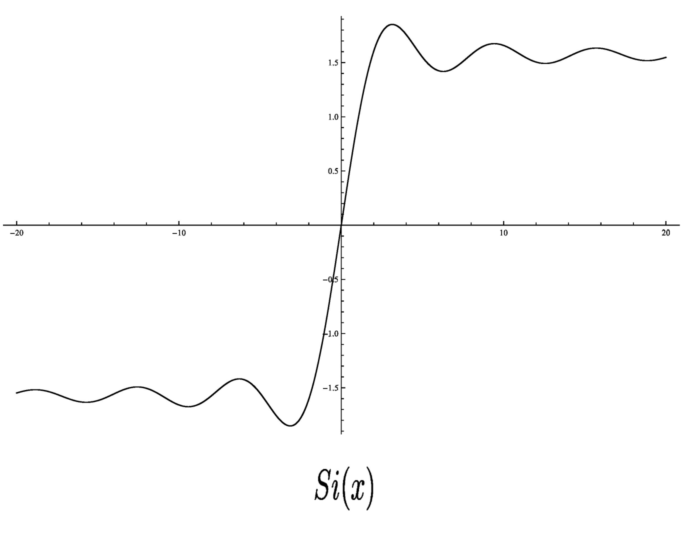
(а) • $\displaystyle\int P_n(x)\,e^{ax}\,dx, \quad a \neq 0;$ *(б)* $\displaystyle\int P_n(x)\,\sin bx\,dx, \quad b \neq 0;$

Замечание: В данных задачах устанавливается, как интегрируются выражения вида: $P_n(x)\,e^{ax}$ и $P_n(x)\,\sin bx$. Отметим, что дробные функции $\dfrac{e^x}{x^n}$ и $\dfrac{\sin x}{x^n}$ уже не интегрируются в конечном виде, но их можно свести к основным:

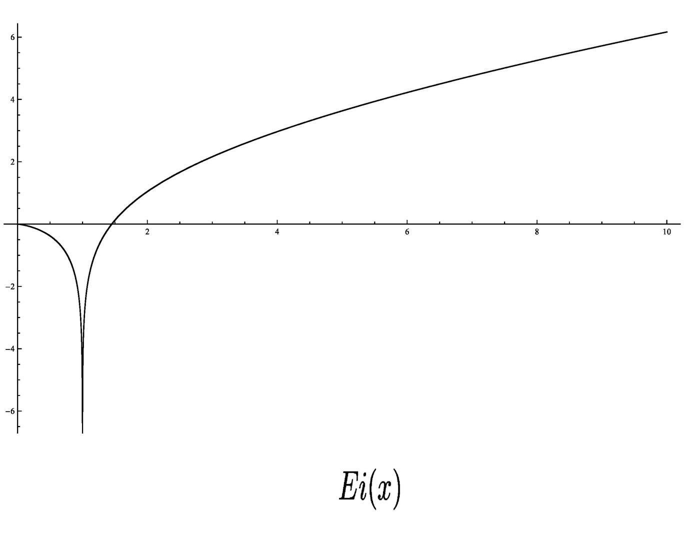
$$Ei(x) \;=\; \int \frac{e^x}{x}\,dx \;=\; \int \frac{dy}{\ln y} \;=\; li(y), \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; Si(x).$$

(в) Выразите через $Ei(x)$ интеграл $\displaystyle\int \frac{e^x}{x^n}\,dx, \quad n > 1.$

(г) Выразите через *интегральный логарифм* $li(x)$ интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln^2 x}, \quad 0 < x < 1.$



$Si(x)$



$Ei(x)$

25.4.

(а) • Выведите формулу понижения и предложите алгоритм вычисления для интеграла

$$\int x^k \ln^m x\,dx, \quad -1 \neq k \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N};$$

(б) Вычислите интеграл

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx, \quad (x > 0);$$

25.5. • Выведите рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

25.6. *(2180)* Пусть f монотонная непрерывная функция и f^{-1} её обратная. Докажите, что если $\int f(x)\,dx \;=\; F(x) + \mathbf{C}$, то

$$\int f^{-1}(x)\,dx \;=\; xf^{-1}(x) - F\big(f^{-1}(x)\big) + \mathbf{C}.$$

25.7. *(Практикум по решению неопределённых интегралов)*

Применяя различные методы, найдите следующие интегралы:

(а) $\displaystyle\int \frac{2\mathrm{sh}x + 3\mathrm{ch}x}{4\mathrm{sh}x + 5\mathrm{ch}x}\,dx;$ *(б)* $\displaystyle\int \frac{\mathrm{ch}^2 2x}{\mathrm{sh}^3 x}\,dx;$

(в) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx, \qquad (x > 0);$

(г) $\displaystyle\int e^{ax} \cdot \cos bx\,dx, \qquad (a,\ b \in \mathbb{R},\ \ a \neq 0,\ \ b \neq 0);$

(д) $\displaystyle\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\,dx, \qquad (x > 0);$ *(е)* $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(\ln x + 1)^2}\,dx, \qquad (x > 0);$

(ж) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1 + x^2}\,\mathrm{arctg}x\,dx;$ *(з)* $\displaystyle\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x\,dx, \qquad (x > 0);$

(и) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}\,dx;$ *(к)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}, \qquad (x > a);$

(л) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}};$ *(м)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}};$

(н) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + x + 2)^5}};$ *(о)* $\displaystyle\int e^{-\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$

25.8. Определите первообразную на действительной прямой $\mathbb{R}$ следующих функций:

а) $f(x) = |x|\, e^x$; *б)* $f(x) = |x^2 - 2x|$;

в) $f(x) = \sin x + |\sin x|$; *г)* $f(x) = |\ln x|$.

25.9. Проверьте, что функция

$$F(x) = (-1)^k \cos x + 2(k-1), \quad x \in \big[(k-1)\pi; k\pi\big], \ \ k \in \mathbb{Z},$$

есть первообразная для функции $f(x) = |\sin x|, \ \ x \in \mathbb{R}$.

25.10. Определим для $n \in \big(\mathbb{N} \cup \{0\}\big)$ функцию

$$(x)_+^n = \begin{cases} x^n, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

Докажите, что $\displaystyle\int (ax+b)_+^n \, dx \ = \ \frac{(ax+b)_+^{n+1}}{a(n+1)} + C, \ \ x \in \mathbb{R}$, где $a > 0, \ b \in \mathbb{R}$.

25.11. Найдите первообразную для функции $y = \dfrac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2}$.